Test di Matematica (A)

Scienze Agrarie 7/02/2022

1) Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + \cos(x)}{x^3 + x^2 + 5}\,.$$

2) Data la funzione

$$f(x) \;=\; \frac{x^2 - 2}{x + 3}\,,$$

determinare gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo.

3) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) \;=\; \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\log(1 - x^2)}$$

e calcolarne la funzione derivata prima.

4) Calcolare, se esiste, l'integrale improprio

$$\int_0^3 \frac{2}{x^2 - 9}\,dx\,.$$

Soluzione

1) Il limite si presenta nella forma $\frac{\infty}{\infty}$ ed applicando ripetutamente il teorema de l'Hopital si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+\cos(x)}{x^3+x^2+5} \;=\; +\infty\,.$$

2) La funzione data non risulta definita per $x=-3$.
La funzione derivata prima è

$$f'(x) \;=\; \frac{x^2+6x+2}{(x+3)^2}\,.$$

La derivata si annulla per $x_0=-3-\sqrt{7}$ e per $x_1=-3+\sqrt{7}$.
Dallo studio del segno si deduce che x_0 è punto di massimo relativo mentre x_1 è punto di minimo relativo.

3) L'insieme di definizione D è dato dai valori reali per i quali risulta $x\neq 0$ e $1-x^2>0$. Si ha quindi

$$D=]-1,0[\,\cup\,]0,1[\,.$$

Si ha

$$f'(x) \;=\; \frac{-\frac{1}{x^2}\cos(\frac{1}{x})\log(1-x^2)+\sin(\frac{1}{x})\frac{2x}{1-x^2}}{\log^2(1-x^2)}$$

4) Risulta

$$\int \frac{2}{x^2-9}dx=\frac{1}{3}\left[\int\frac{1}{x-3}\,dx-\int\frac{1}{x+3}dx\right]=\frac{1}{3}\left[\log|x-3|-\log|x+3|\right]+C.$$

Per sapere se la funzione risulta integrabile in senso improprio si calcola

$$\lim_{t\to 3^-}\frac{1}{3}\left[\log|x-3|-\log|x+3|\right] \;=\; -\infty\,.$$

Il limite calcolato non risulta finito per cui non esiste l'integrale improprio della funzione sull'intervallo $[0,3]$.